理性文明 (civilization of rational mind)

- 认知：大自然之本质、宇宙之理
- 自然科学、現代科技
  則是其中：所知、所得
- 世代相承、蓬勃进展
- 古希腊文明 (antiquity) 中获得
  長足进展
- 畢氏 (Pythagoras) 哲理性信念：
  宇宙是具有简樸和谐的本质
  与反理的，我们可以通过 数、比值
  与形的研讨 (由表及裡) 探索认知

推理几何学（Deductive Geometry）

〈理性文明的启蒙与奠基〉

⊙ 启蒙：定性平面幾何学（紀前七、六世紀）

泰萊斯（Thales）首先用

邏輯推理（logic deduction）

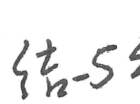
对于当年埃及、巴比倫所累积的定性平几的认知作一次系统论证，達成"平面几何知识上的系统化以简御繁"乃是理性认知、治学方法论上的創举。

平几事物、性质
△，⊙，角度
長度，疊合
多彩多姿，直观明朗

$\xrightarrow{\text{歸納分析}}$

$\xleftarrow{\text{推理論证}}$

基本性质：
連结与分隔
对称性



推理定性平几(deductive plane geometry)

在理性文明发展史上的地位，启蒙者

对于现代学子，启发心智、培训逻辑

思维、解析认知和创新能力的教育上

乃是最佳的途径与园地；而这方面

的教育，在如今资讯泛滥的时代

尤为迫切、重要.

⊙ 资讯与知识的差别：资讯要

辨择真伪，去糟杂，认知其精要

才能成为有用的知识.

⊙ 逻辑的本质与逻辑思维的培训

$$\begin{array}{ccc} \text{性质}\,\alpha & \longleftrightarrow & \text{集合}\,A \\ \Downarrow & & \cap\!| \\ \text{性质}\,\beta & \longleftrightarrow & \text{集合}\,B \end{array}$$

简朴精到，其理甚明

理在用中方知妙，其培训要妥选园地.

平几简朴精到而多彩多姿，直观上平实

近人，而内涵却又引人入胜. 由此可见；

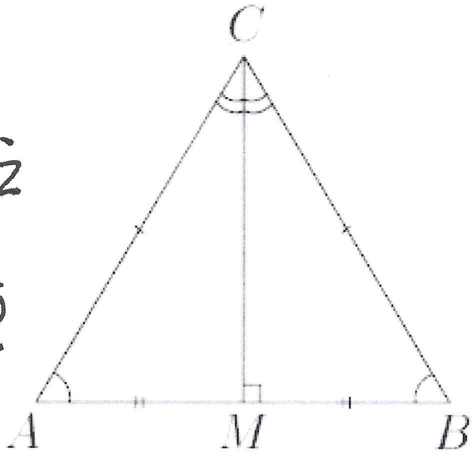
自古以来，推理定性平几依然是培训逻辑思维能力的最佳园地。要点在于把它教得易学好懂，充分体现它的优点。此事我觉得设身处地身歷其境的重访当年創建推理定性平几的精要与关键是一种平实近人，引人入勝的好法子。

重访推理定性平几之創建 (Thales et al)

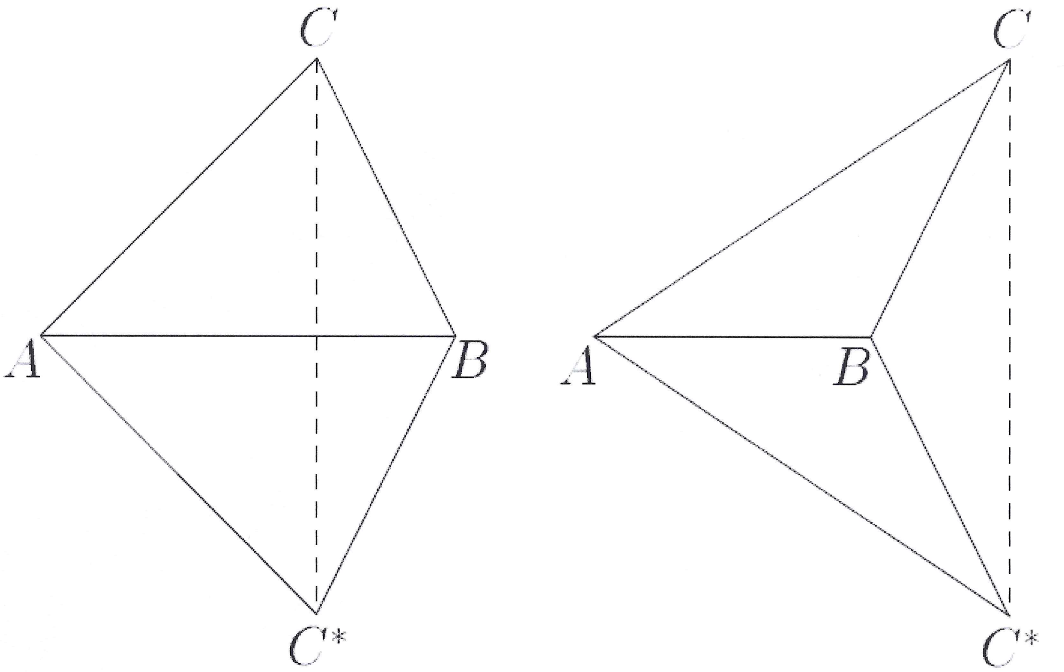
定性平几：研讨全等形 (congruence) 例如 △ 之间的全等条件，和各种几何量之间的相等或大小关系，但是对于不相等的長度或角度尚未进而研究它们的比值。(此事留待定量平几才来讨論。

(1)

等腰△之特徵性质



(2) SAS ⇒ 等腰△定理 ⇒ SSS



[注]：SSS定理彰显了長度的基本重要性，角度從屬于長度；它也是各种各樣規尺作圖的原理之所基

(3) 基本作图与作图题，例如

(i) $\overline{AB}$ 的垂直平分线和平面对于给定直线的反射对称性

(ii) $\angle ABC$ 的角平分线

(iii) $\triangle ABC$ 的外接圆

(iv) $\triangle ABC$ 的内切圆，等等.

要点：平面对于任给直线的反射对称性乃是平面最为重要有用的基本性质，而等腰$\triangle$则是具有反射对称性的$\triangle$，它是剖析反射对称性在各种各样平几图形或问题中的作用的精简工具，定性平几论证的基本引理。這其实就是当年 Thales 开创推理定性平几的"卓見"

(4) 几何不等式:

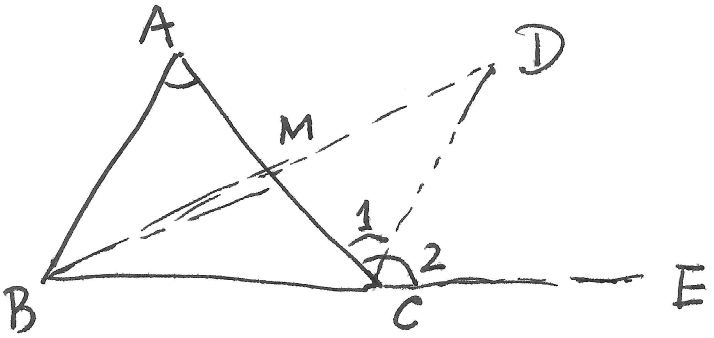
(i) 外角大于它的(两个)内对角,

(⇒ 两角之和 $< \pi$)

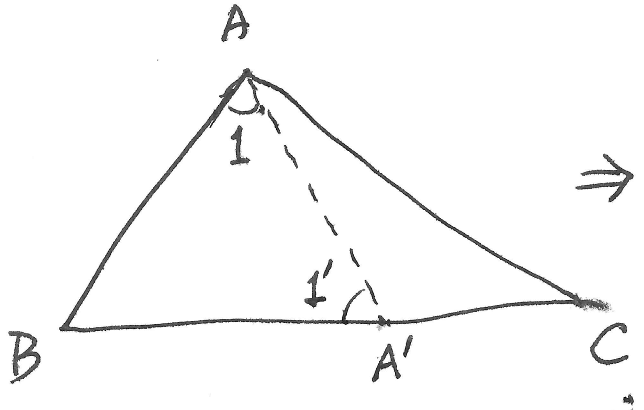
(ii) 大边对大角

(iii) 大角对大边

(iv) 两边之和大于第三边

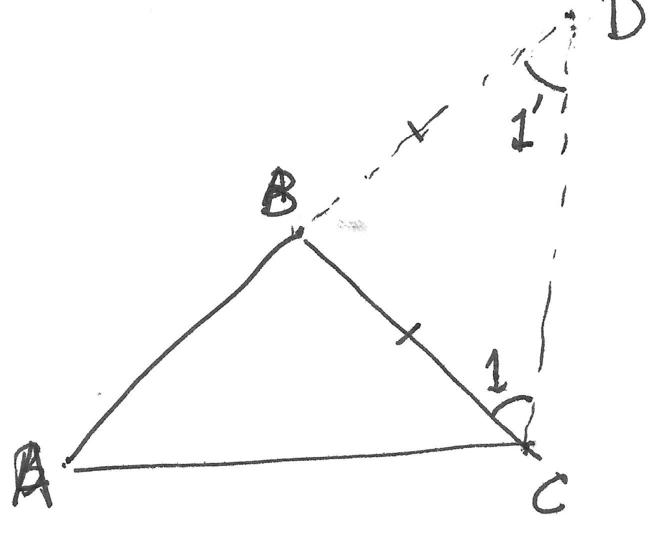


$\angle 2 > \angle 1 = \angle A$



$\overline{BC} > \overline{BA}$, $\overline{BA'} = \overline{BA}$

$\Rightarrow \angle A > \angle 1 = \angle 1' > \angle C$



$\angle 1' = \angle 1$

$< \angle ACD$

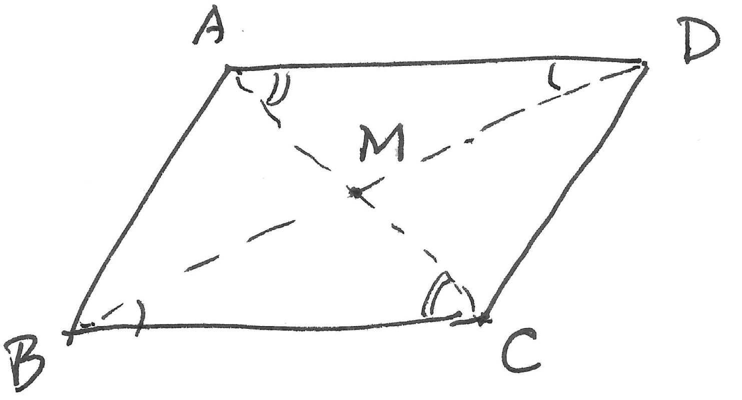
$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC}$

$= \overline{AB} + \overline{BD}$

$> \overline{AC}$

(5) 两个简单的心对称图形

(i)

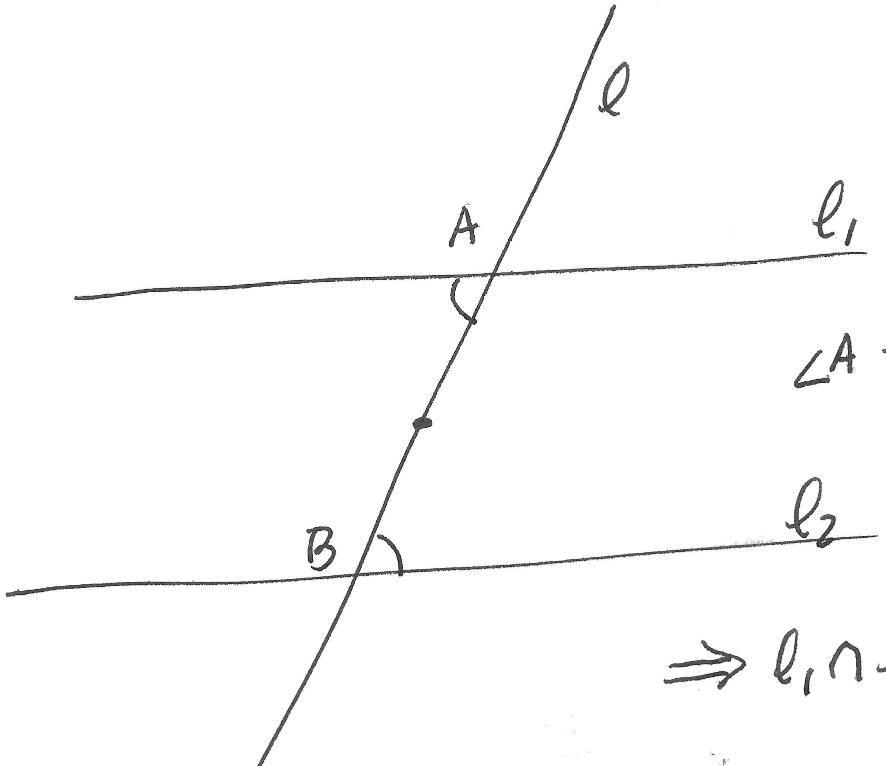


$\overline{AB} = \overline{DC}$

$\overline{AD} = \overline{BC}$

对角线互相平分

(ii)



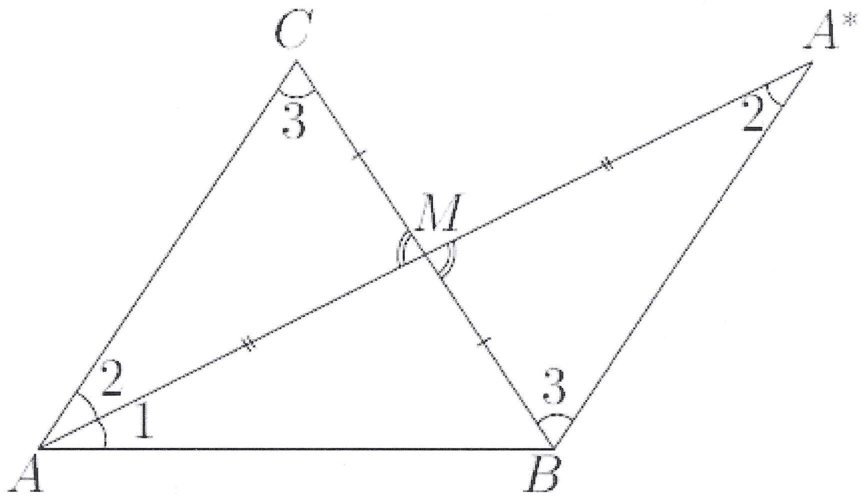
$\angle A = \angle B$

$\Rightarrow l_1 \cap l_2 = \phi$

(6) 两个当年"失之交臂"的重要定理:

Thm 1: Angle sum of any triangle $\leq \pi$

If angle sum of $\Delta ABC = \pi + \varepsilon$, construct



$$\angle \text{ sum of } \Delta ABA^* = \angle \text{ sum of } \Delta ABC = \pi + \varepsilon$$

$$\angle 1 \ (\text{or } \angle 2) \leq \frac{1}{2}\angle A$$

$$\Rightarrow \quad \angle 1' \leq \frac{1}{2}\angle 1 \leq \frac{1}{2^2}\angle A, \quad \angle 1'' \leq \frac{1}{2^3}\angle A, \cdots\cdots$$

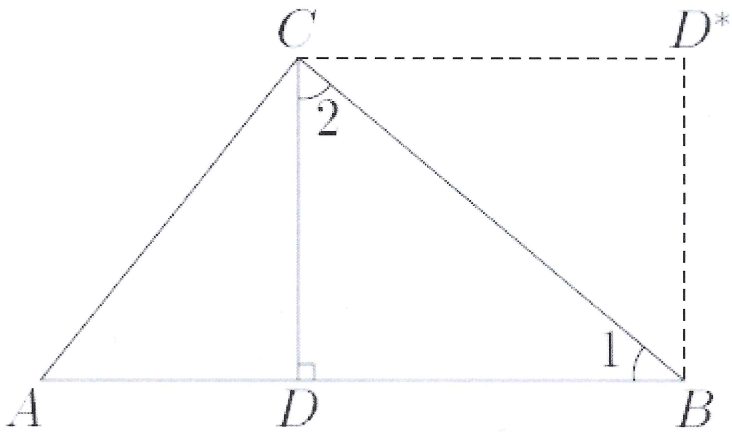
$$\angle 1^{(n)} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \angle 2^{(n)} + \angle B > \pi,$$

contradiction.

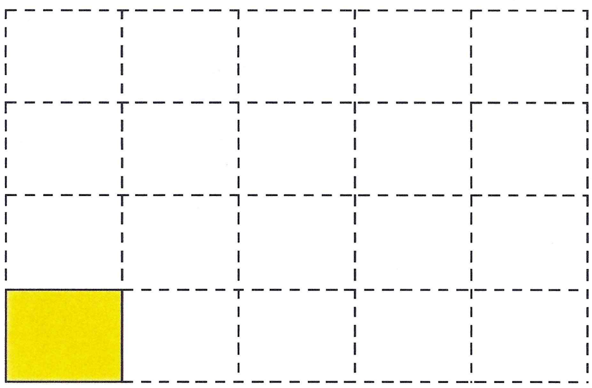
Thm 2: If exists one triangle with angle sum $= \pi$,

every triangle will have angle sum $= \pi$.

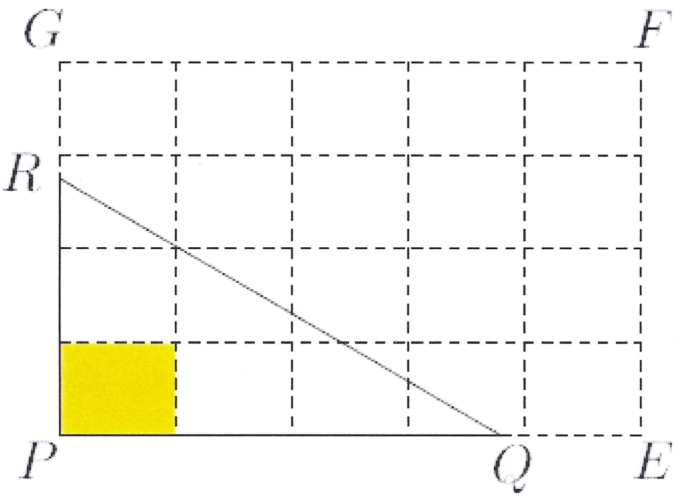
Step 1: Exist a rectangle (with four right angles).

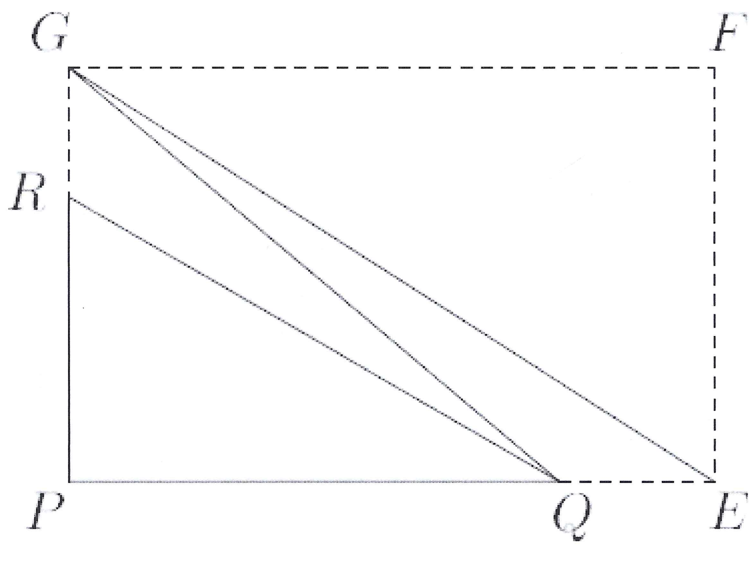


Step 2: Exist rectangle with arbitrarily large size.



Step 3: Any right angle triangle has angle sum $= \pi$





Step 4: Every triangle has angle sum $= \pi$

定量平几基础(初)论(毕氏学派)

⊙ 基于线段長可公度性(commensurable)
的普遍成立和平直性(△内角和 ≡ π)
用平行分割將定量平几中的基本公式
矩形面积 = 長 × 宽
△面积 = $\frac{1}{2}$底 × 高
直角△的斜边平方 = 两直角边之平方和
(毕氏定理;亦即中国古算中的
勾方 + 股方 = 弦方)
两个相似△的对应边成比例,即
$$a:a' = b:b' = c:c'$$
给以系统论证,引以自豪.

中希定量年代的比較分析：

⊙ 基本公式大体相若：即有

(i) 同樣的面积公式

(ii) 同樣的直角△的邊長平方关系式

勾股弦公式 ↔ 畢氏定理

(iii) 直角△相似的比例式 ↔ 一般相似△的比例式

(出入相補原理) (歸纳论证)

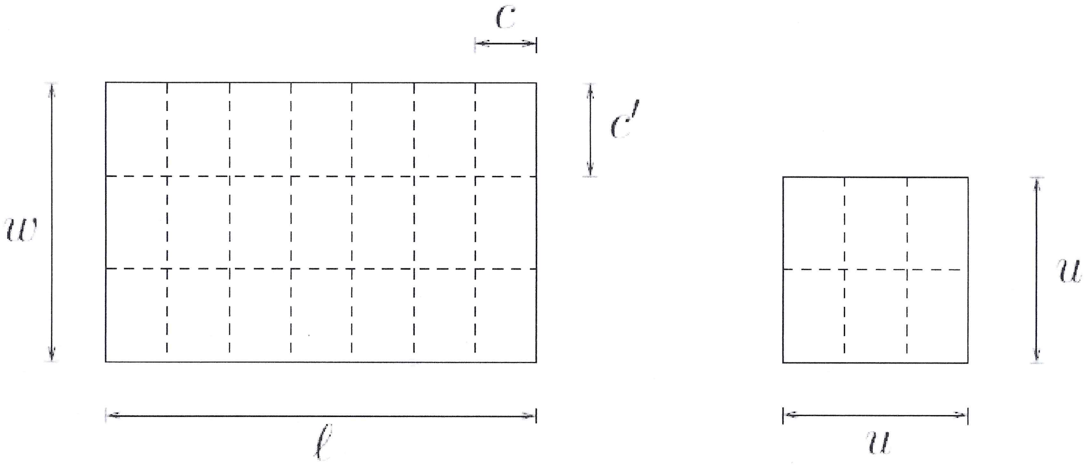
⊙ 前者善用矩形面积公式，一以貫之，但是矩形面积公式未加深究

⊙ 後者基于可以度性与平直性加以严格论证

兩相比較，互有長短

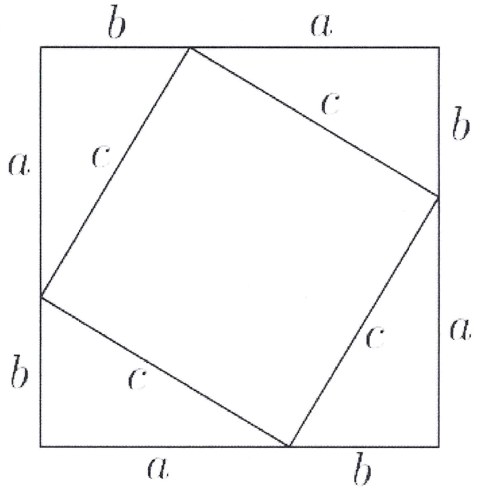
$$\ell = m \cdot c, \quad u = n \cdot c, \quad (\ell : u) = \frac{m}{n}$$

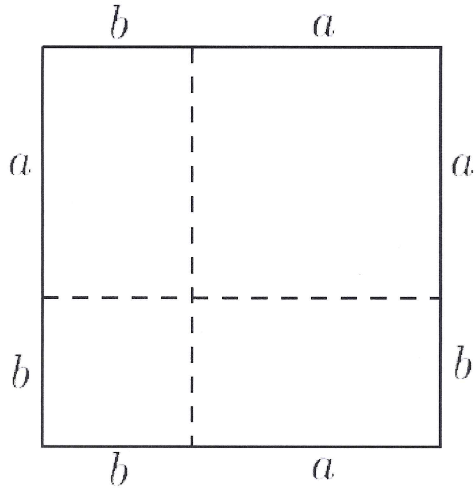
$$w = p \cdot c', \quad u = q \cdot c', \quad (w : u) = \frac{p}{q}$$



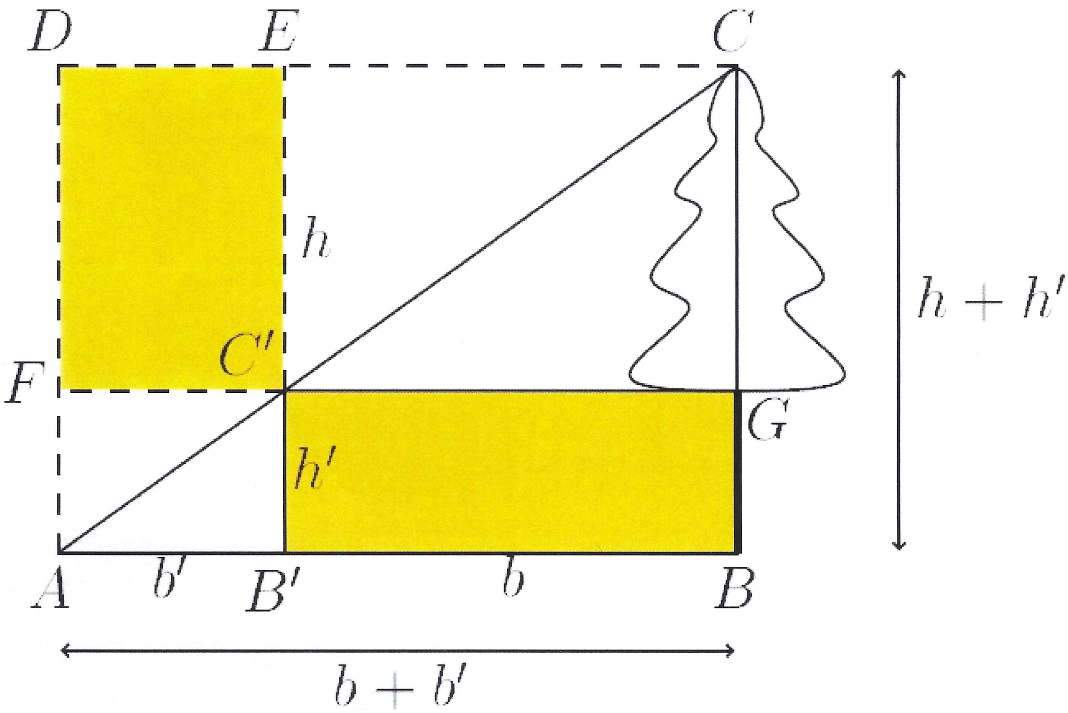
$$\square(\ell, w) : \square(u, u) = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = (\ell : u) \cdot (w : u)$$

基于可公度的矩形面积公式的平行分割论证法

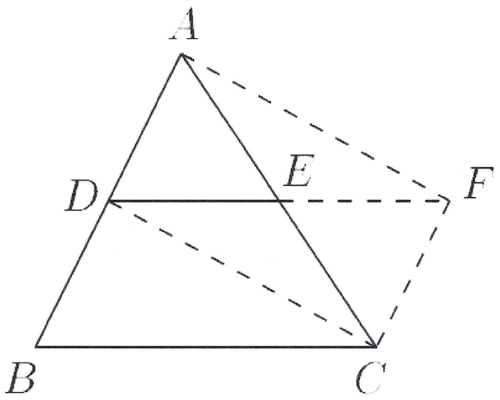


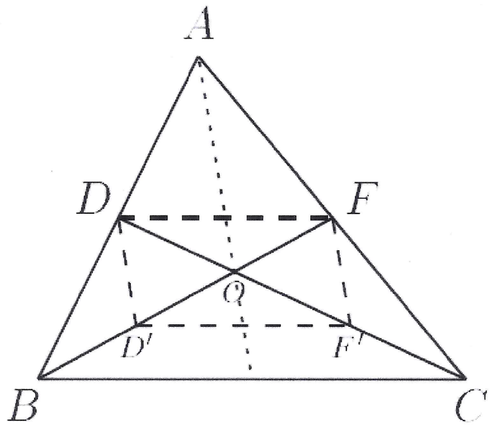


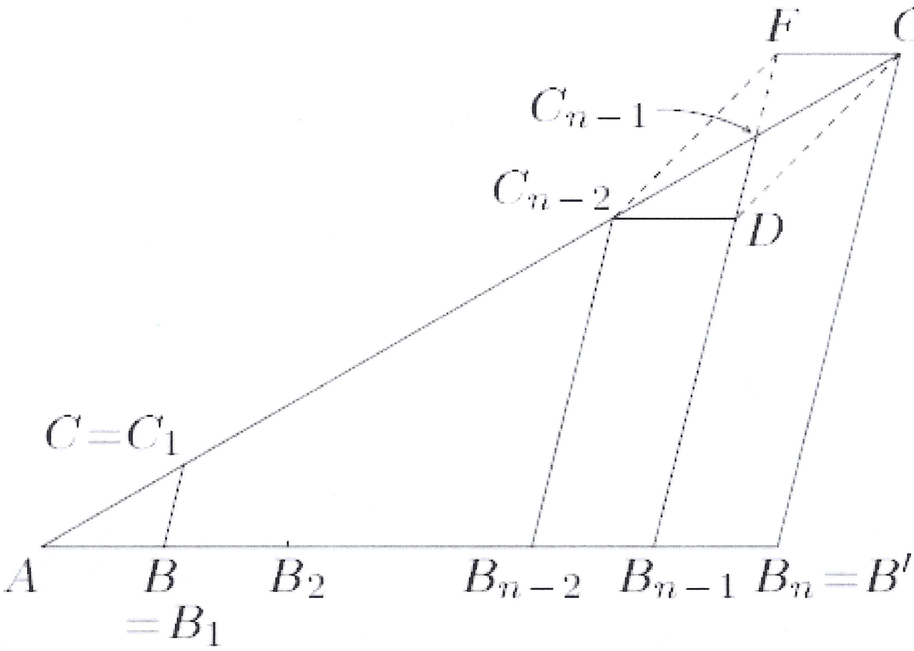
$$c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 2ab \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$



$$b \cdot h' = b' \cdot h \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} \quad \Rightarrow \quad \frac{b+b'}{b'} = \frac{h+h'}{h'}$$


A
D
E
F
B
C


A
D
F
O
D'
F'
B
C


F
$C_n = C'$
C_{n-1}
C_{n-2}
D
$C = C_1$
A
B
$= B_1$
B_2
B_{n-2}
B_{n-1}
$B_n = B'$

希腊定量平几基础论上的挫折与辉煌

⊙ 不可公度线段偶的发现（Hippasus）

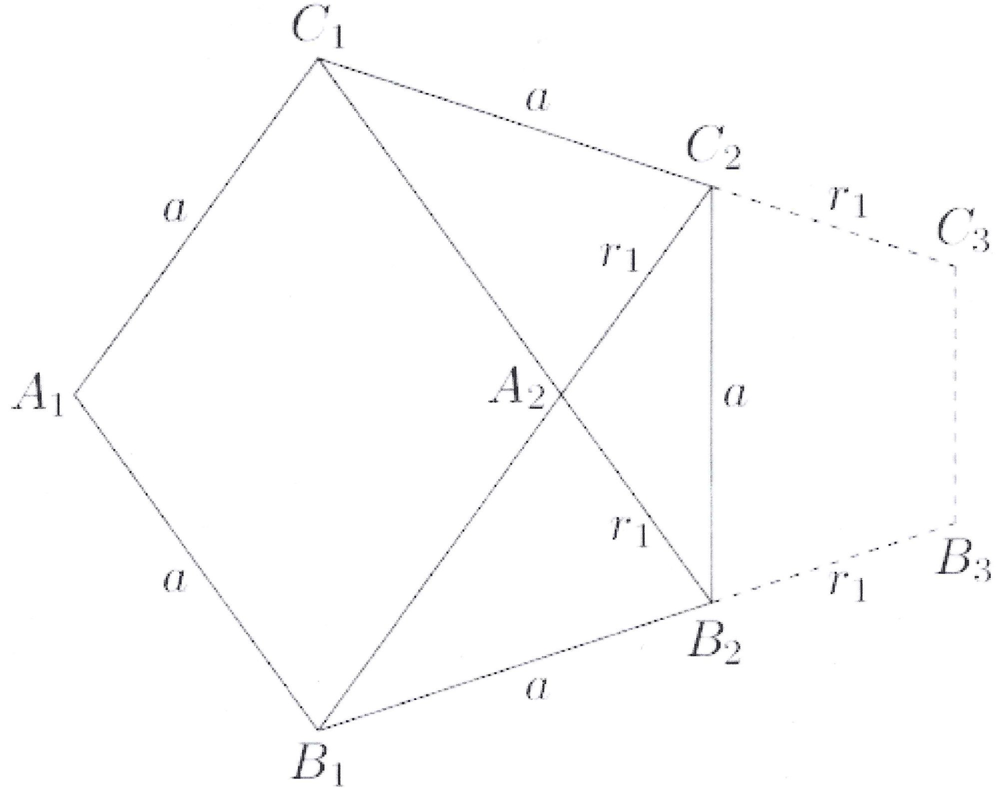
理性文明史上的伟大发现，但是对于当年毕氏学派引以自豪的定量平几基础论来说却是动摇根本的巨震与挫折，举国蒙羞。

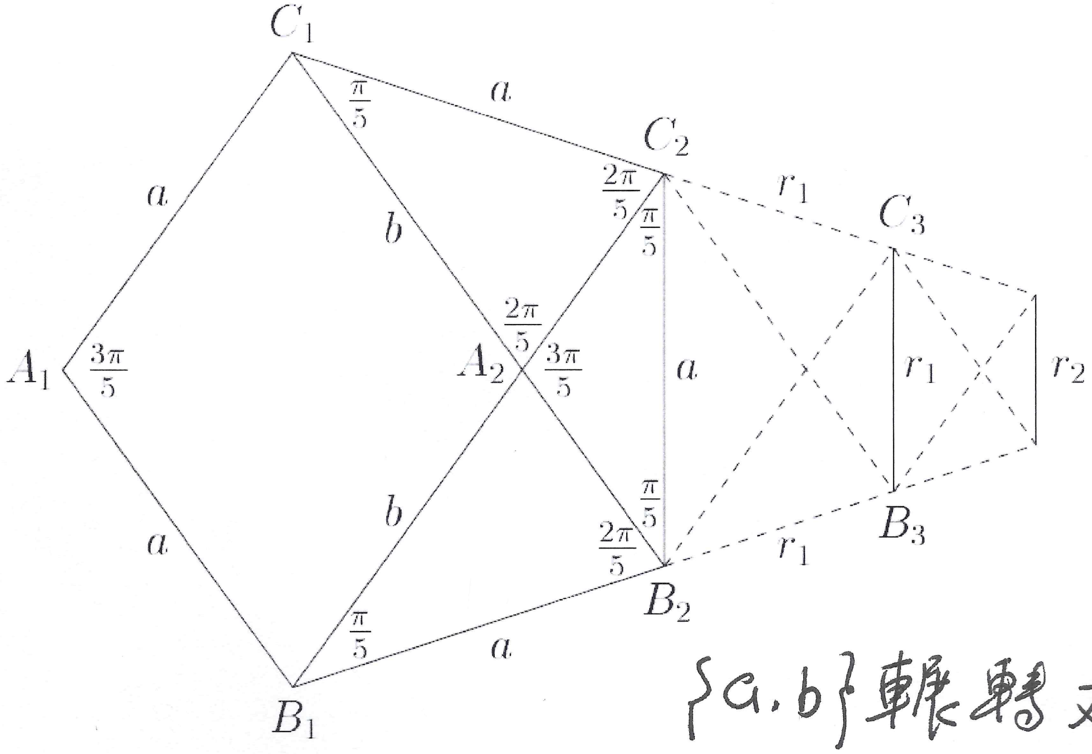
⊙ 痛定思痛，当代的希腊几何学界认识到原先之基础论乃是对于那些基于公式在可公度的情形的证明；而在一般不可公度的情形则有待补证，此乃挽救基础论亟待克服的挑战

⊙ 历经近半世纪的奋斗与探讨，此事终于由Eudoxus创逼近论而完美

達成定量几何基础论的重建輝煌，不但使得希腊推理几何学沐火重生，脱胎换骨，而且也因而对于大自然实用的數系（实数系）的本质有了简樸精到的认知。如今回顧返思

Eudoxus的逼近论不但為几何基础论奠定完善的基石，也同時為往後的分析学奠定了坚实的基础；实乃整个理性文明，定量分析，由表及裡认知宇宙之理的奠基工程。形象地来概述這一段理性文明的"史诗"：我们所在的宇宙乃是天衣無縫的連续世界，Hippasus為人類發現了連续世界而Eudoxus教导我们如何去认知連续世界





{a,b}輾轉丈量

$$b = a + r_1 \rightarrow a = r_1 + r_2$$

永無止休;

{a,b}不可公度!

Eudoxus的逼近论：

(1) 頓悟与啓蒙：相信Eudoxus是在他研讨相似△定理的補证之中有此"頓悟"：设$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$其对边分别是$\{a,b,c\}$和$\{a',b',c'\}$。若有一对对应边如$\{a,a'\}$是可公度的情形即有$a:a'=\frac{m}{n}$，则業已得证$b:b'$和$c:c'$也等于$\frac{m}{n}$。所要補证的情形乃是三对都是不可公度的情形

$$a:a'=b:b'=c:c'$$

依然成立。在他对此苦思不得其解之中驟然醒悟到两对不可公度线段的比值之间的比較大小或相等关系其实尚未待明確！有此啓發就自然引領他对于不可公度比的

定量认知，Eudoxus 逼近论：

(2) 比較原理：

$$a:b\begin{cases} > \frac{m}{n} \\ < \frac{m}{n} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} n\cdot a > m\cdot b \\ n\cdot a < m\cdot b \end{cases}$$

(3) 逼近定理：对于任给不可公度比 $a:b$ 和任意大的正整数 N，恒有一 m 使得

$$\frac{m}{N} < a:b < \frac{m+1}{N}$$

他以下述直观明显"公设"為依据，即現在误称為 Archimedes 公理者：

对于任给两线段 $\{s, l\}$，不论 s 有多短，l 有多長，恒有足够大的 n 使得 $n\cdot s > l$。

[证] 令 $\frac{1}{N}b = s$ $l = a$，$m+1$ 是第一个使得 $(m+1)s = \frac{m+1}{N}\cdot b > a$ 者，即得上述左、右夹逼不等式。

(4) 不可公度比之间的大小或相当之明確.

(i) $a:b \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} c:d \Longleftrightarrow \exists \frac{m}{n}$, s.t $\begin{cases} a:b > \frac{m}{n} > c:d \\ a:b < \frac{m}{n} < c:d \end{cases}$

(ii) 若对于任何 $\frac{m}{n}$ 皆有

$$a:b > \frac{m}{n} \Longleftrightarrow c:d > \frac{m}{n}$$

$$a:b < \frac{m}{n} \Longleftrightarrow c:d < \frac{m}{n}$$

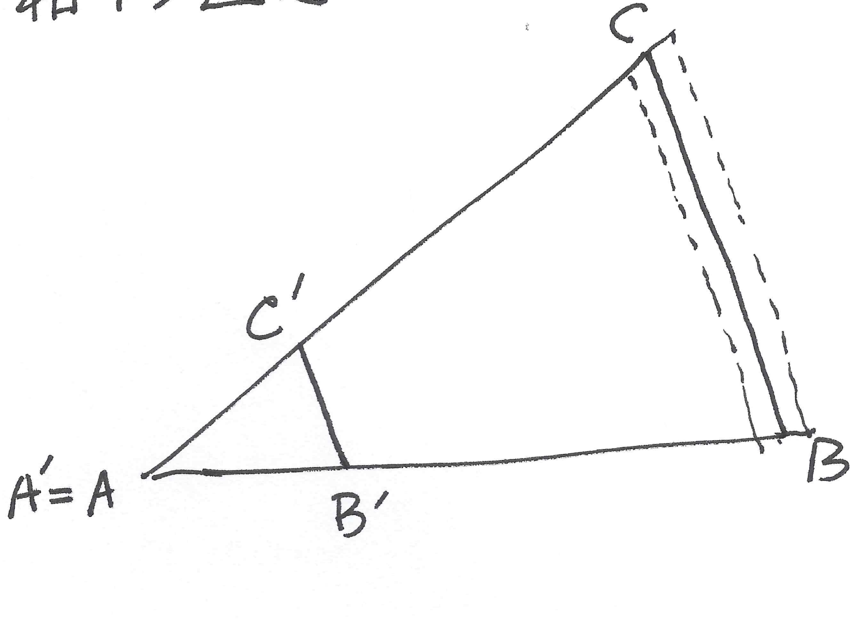
则定义為 $a:b = c:d$.

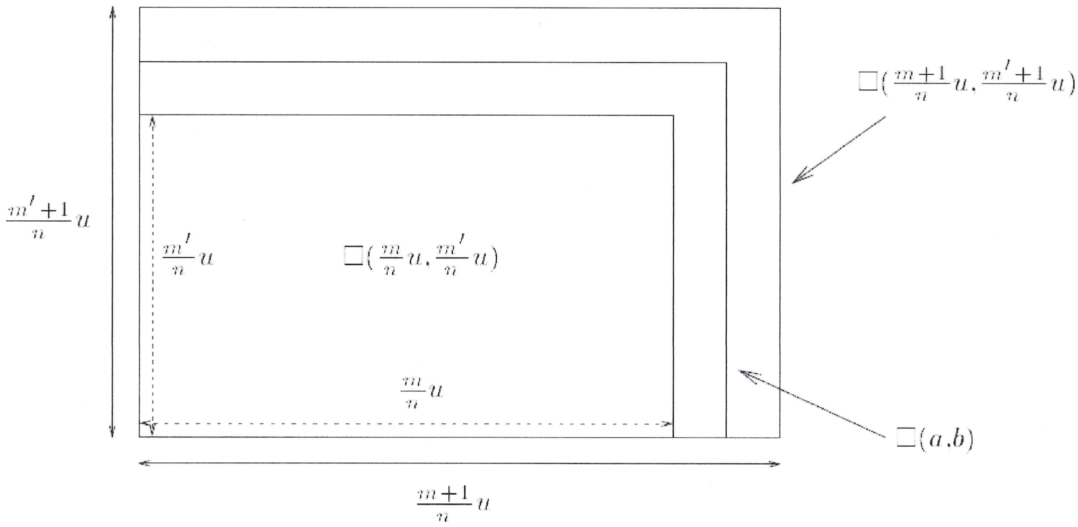
這就是当年 Eudoxus 所創的逼近论

顺理成章，简樸精到，平实近人.

首先，当年使得他苦思不得其解的

相似△定理的補证，由此迎刃而解

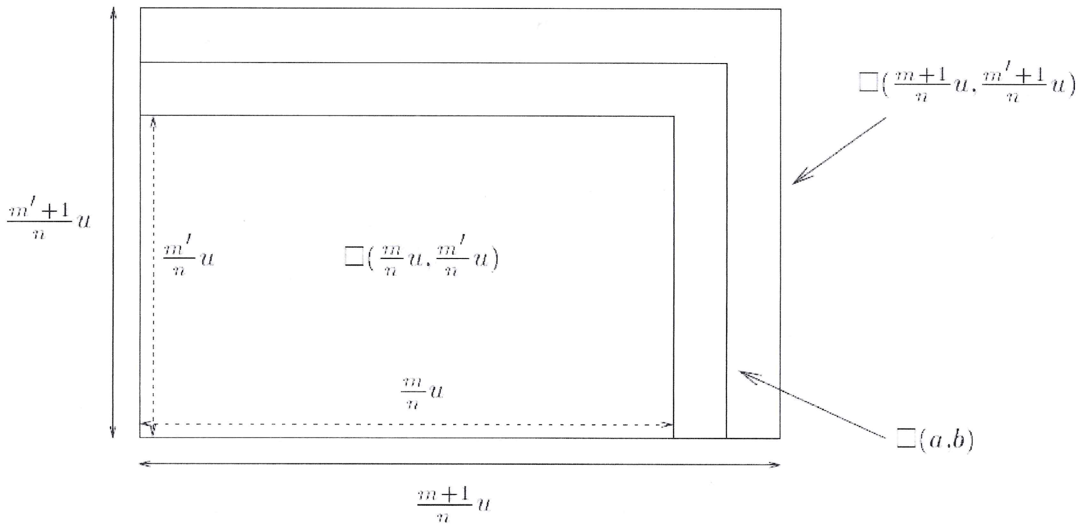




$$\frac{m}{n} \le a : u < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'}{n} \le b : u < \frac{m'+1}{n}$$

$$\frac{mm'}{n^2} \le \left\{ \begin{array}{c} (a:u)(b:u) \\ \square(a,b) : \square(u,u) \end{array} \right\} < \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}$$

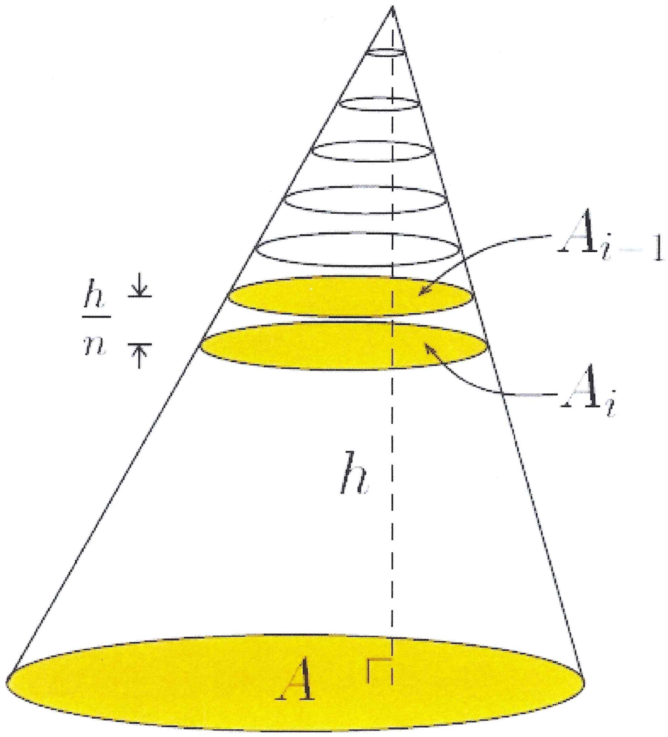
$$\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2} - \frac{mm'}{n^2} = \frac{m+m'+1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'+1}{n}\right)$$



$$\frac{m}{n} \le a : u < \frac{m+1}{n}, \qquad \frac{m'}{n} \le b : u < \frac{m'+1}{n}$$

$$\frac{mm'}{n^2} \le \left\{ \frac{(a : u)(b : u)}{\square(a,b) : \square(u,u)} \right\} < \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}$$

$$\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2} - \frac{mm'}{n^2} = \frac{m+m'+1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'+1}{n}\right)$$



$$\frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < \sum_{i=1}^{n} V_i = V < \frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

$$\frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < V < \frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{hA}{n}$$

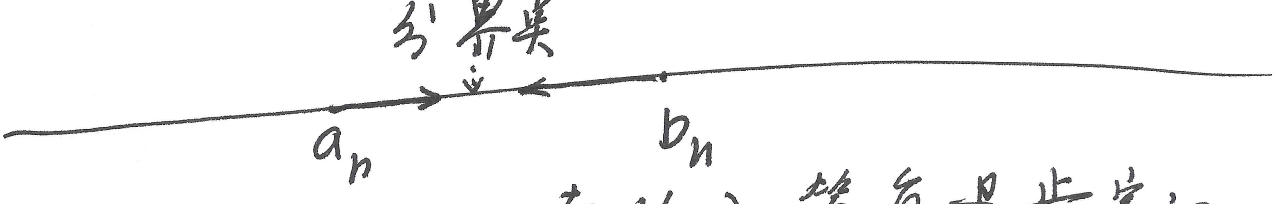
【注】若改用左、右夹逼数列或区间套来改述 Eudoxus 逼近论，即有

$$\{a_n \longrightarrow \longleftarrow b_n\},\ (b_n - a_n) \to 0$$

则其分界数唯一存在。

Eudoxus 当年在把可以度量已得证的定理，在不可公度的情形加以补证时，所用的是唯一性；所要证的两种比值相等。

如今逼近数列、数列极限广泛运用，自然需要研讨其存在性。我们不妨设想当年有人在大师讲课时问~~这~~上述存在性问题，他可能如何作答？



相信他略加思索后的答复是肯定的。其理由是：如上述图解所示，直线是连续不断的，但是一剪就断，由此可见存在性乃是直线连续性的解析描述！